

Exercices Série 16

Résolvez le système d'équations suivant avec la méthode de factorisation LU :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Réponses

Ecrivons d'abord le système sous forme d'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss nous donne la factorisation LU suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En résolvant $L\vec{y} = \vec{b}$ nous obtenons

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Il nous reste à résoudre $U\vec{x} = \vec{y}$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

Et en effet, nous vérifions que c'est la solution :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$